L'âge du calcul

Discours de réception

Thierry Dumont

23 Novembre 2021

Calcul scientifique

Appellation courante : simulation numérique.

Plutôt que de faire des expériences, résoudre les équations qui décrivent les phénomènes qu'on veut étudier.

Remplacer l'expérience par le calcul

- Quand les objets à étudier sont trop éloignés,
- quand les phénomènes sont trop lents ou trop rapides pour être étudiés,
- quand l'expérience est trop coûteuse,
- quand l'expérience est trop dangereuse,
- pour tester une hypothèse scientifique,
- etc.

Application la plus populaire : la météorologie.

Calcul scientifique

« Composants » :

1. Équations (de la physique, de la mécanique,...) : modélisation mathématique.
2. Mathématiques.
3. Informatique (programmation et matériel).

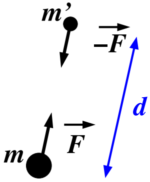
Développement très rapide à partir des années 1980.

(Pré)histoire

Du calcul scientifique avant l'apparition des ordinateurs ? oui, bien sûr.

Exemple :
1759 : Alexis Clairaut, Nicole-Reine (dite Hortense) Lepaute et le retour le la comète de Halley.

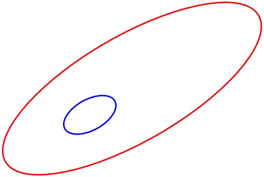
- Prévoir la date du retour de la comète serait une confirmation supplémentaire de la théorie de Newton.
- Impossibilité de faire des expériences, pas de dispositif analogique (la gravitation est une interaction très faible).



$$\|\vec{F}\| = G\frac{m \times m'}{d^2}$$

$$\vec{F} = m\,\vec{\gamma}.$$

Le problème des deux corps



Les deux corps parcourent des ellipses.

On a une solution exacte pour la trajectoire de chacun des corps, dès que la vitesse et la position de chacun d'eux est connue à un même instant.

Si on a plus de deux corps ?

Dans le cas de la comète, elle subit outre l'attraction du Soleil, celle des planètes.

Si on a plus de deux corps ?

Dans le cas de la comète, elle subit outre l'attraction du Soleil, celle des planètes.

- Pas de solution exacte.
- Chercher une solution approchée qu'on saura calculer.

Si on a plus de deux corps ?

Idées de Clairaut :

1. les effets de l'attraction des planètes sur la comète sont faibles par rapport à l'attraction du Soleil.
2. On peut donc décrire l'orbite de la comète comme une ellipse perturbée.

Alexis Clairaut et Hortense Lepaute

- choisissent des perturbations de l'ellipse raisonnables, et calculables.
- Ne tiennent compte que des perturbations de Jupiter et de Saturne.

Hortense Lepaute & Alexis Clairaut

« Pendant plus de six mois, nous (Nicole Reine Lepaute) et moi calculâmes depuis le matin jusqu'au soir, quelquefois même à table » cité par Lalande, Histoire de l'astronomie (1803).

Ils prédisent (fin 1758) le retour de la comète (début 1759) avec une précision d'un mois.

Ils prédisent (fin 1758) le retour de la comète (début 1759) avec une précision d'un mois.

Vérification éclatante **par le calcul** de la *théorie de Newton*, même si ce n'est pas la seule, ni la première (le même Clairaut, par exemple, a donné en 1743 un modèle de l'applatissement de la terre).

Bilan : des questions au cœur du calcul scientifique

- L'ellipse perturbée n'est pas la solution exacte du problème, mais seulement une solution approchée.

Bilan : des questions au cœur du calcul scientifique

- L'ellipse perturbée n'est pas la solution exacte du problème, mais seulement une solution approchée.
- Quelle est la qualité de cette approximation ? Combien de temps est-elle acceptable ?

Bilan : des questions au cœur du calcul scientifique

- L'ellipse perturbée n'est pas la solution exacte du problème, mais seulement une solution approchée.
- Quelle est la qualité de cette approximation ? Combien de temps est-elle acceptable ?
- Autres sources d'erreurs possibles :

$$\|\vec{F}\| = G\frac{m \times m'}{d^2}.$$

Importance des erreurs sur m, m', d et G (problème de stabilité) ?

La démarche en calcul scientifique :

1. Remplacer le problème exact, qu'on ne sait pas résoudre, par un problème plus simple qu'on sait résoudre :
   - Alexis et Hortense : cerveau, papier, crayon, tables de logarithmes.
   - Ordinateurs : ne savent faire que les quatre opérations avec une précision limitée.

La démarche en calcul scientifique :

1. Remplacer le problème exact, qu'on ne sait pas résoudre, par un problème plus simple qu'on sait résoudre :
    - Alexis et Hortense : cerveau, papier, crayon, tables de logarithmes.
    - Ordinateurs : ne savent faire que les quatre opérations avec une précision limitée.
2. Évaluer l'erreur (problème mathématique (analyse numérique)).
3. Effectuer le calcul (sans se tromper...) !

XIX^{e} siècle et première moitié du XX^{e} siècle.

Peu d'évolution. On calcule ce qui est calculable « à la main »(tables, règles à calculer, calculatrices mécaniques, ou en utilisant des abaques (Maurice d'Ocagne)).

Exemple : structures métalliques (tour Eiffel). On construit ce qu'on sait calculer... et les moyens de calcul sont très limités !

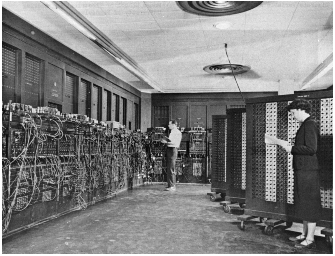
XIX^{e} siècle et première moitié du XX^{e} siècle.

Peu d'évolution. On calcule ce qui est calculable « à la main »(tables, règles à calculer, calculatrices mécaniques, ou en utilisant des abaques (Maurice d'Ocagne)).

Exemple : structures métalliques (tour Eiffel). On construit ce qu'on sait calculer… et les moyens de calcul sont très limités !

Apparition de bureaux de calcul dans lesquels travaillent … presque exclusivement des femmes.

L'apparition des ordinateurs



L'ENIAC (1945)

Calculer des tables pour les militaires, les ingénieurs etc.

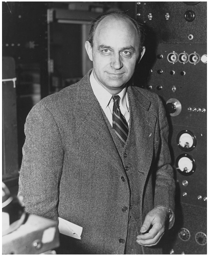
Pas de « simulation numérique », inaccessible vu la faible puissance des ordinateurs, et la difficulté à les programmer.

Des précurseurs. 1) John von Neumann

John von Neumann veut résoudre des problèmes de physique liés à la bombe H.

Note : les problèmes envisagés ont une solution discontinue (cf. le *bang supersonique*). On ne commencera à savoir les traiter que vers 1980 !

Des précurseurs. 2) Enrico Fermi



Concept d'« expérience numérique ».

Des précurseurs. 3) Jacques-Louis Lions (1928–2001)

Président :

- INRIA,
- CNES,
- Conseil scienfifique d'EDF,
- Conseil scienfifique de la météo nationale,
- Académie des Sciences.

Un des premiers à s'être intéressé au « Global Change » climatique.

Première (?) expérience numérique (Los Alamos, 1955)

Fermi, Pasta, Ulam & Tsingou.

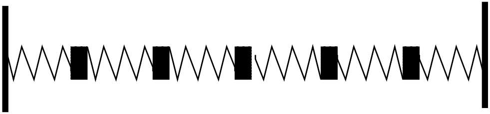
Première (?) expérience numérique (Los Alamos, 1955)

Fermi, Pasta, Ulam & Tsingou.

Comportement surprenant d'un ensemble de masses reliées par des ressorts

- pas tout à fait linéaires,
- sans perte d'énergie.

Début de l'étude des problèmes non-linéaires (*Nonlinear Science).*

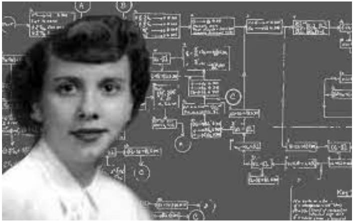


Calcul effectué par Mary Tsingou sur l'ordinateur Maniac.
Mais on a longtemps « oublié » Mary Tsingou...

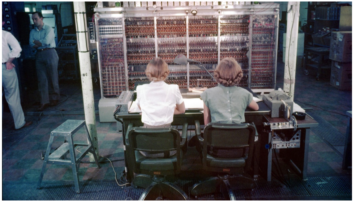
Calcul effectué par Mary Tsingou sur l'ordinateur Maniac.
Mais on a longtemps « oublié » Mary Tsingou...

« We thank Miss Mary Tsingou for efficient coding of the problems and for running the computations on the Los Alamos MANIAC machine. »

Studies of Nonlinear Problems, p. 979 du rapport original, p. 492 de la réimpression.



Mary Tsingou.



MANIAC

(MANIAC : Mathematical Analyzer, Numerical Integrator, and Computer)

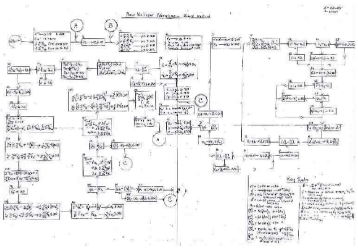
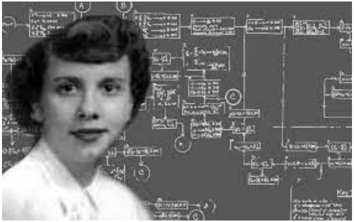
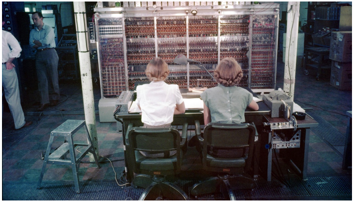


Schéma du calcul de Mary Tsingou.



Mary Tsingou.



MANIAC

(MANIAC : Mathematical Analyzer, Numerical Integrator, and Computer)

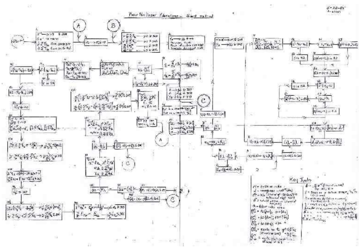


Schéma du calcul de Mary Tsingou.

Voir Thierry Dauxois (ENSL), *Pour la Science* octobre 2021.

Notes :

1. Un système réel (avec de vrais ressorts) ne conserverait pas son énergie. On simule donc une expérience idéalisée, irréalisable en pratique.

Notes :

1. Un système réel (avec de vrais ressorts) ne conserverait pas son énergie. On simule donc une expérience idéalisée, irréalisable en pratique.
2. Calcul correct ? pas sûr ! la méthode numérique utilisée ne conservait certainement pas l'énergie du système (ce qu'on ne saura faire qu'à partir des années 1980).

Les « vrais » problèmes : la résolution des équations aux dérivés partielles

Les grandeurs physiques dépendent en général de plusieurs variables, par exemple la température dans cette pièce dépend du temps t, et de la position x, y, z.

Les « vrais » problèmes : la résolution des équations aux dérivés partielles

Les grandeurs physiques dépendent en général de plusieurs variables, par exemple la température dans cette pièce dépend du temps t, et de la position x, y, z.

Les équations aux dérivées partielles relient entre elles les taux de variation (dérivées premières, secondes,...) des inconnues (la température $T(t, x, y, z)$ par exemple).

Citons :

- L'équation de la chaleur.
- Les équations de l'élasticité linéaire (équations de Navier).
- Les équations de la dynamique des fluides (équations de Navier–Stokes).
- Les équations de Maxwell (électromagnétisme).

- (Systèmes) d'équations différentielles : dépendance d'une seule variable (disons t).
- (Systèmes) d'équations aux dérivées partielles : dépendance de plusieurs variables $(t, x, y, z, \ldots)$.

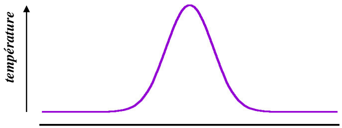
- (Systèmes) d'équations différentielles : dépendance d'une seule variable (disons t).
- (Systèmes) d'équations aux dérivées partielles : dépendance de plusieurs variables $(t, x, y, z, \ldots)$.

Équations aux dérivées partielles : problèmes a priori plus difficiles que la résolution numérique des équations différentielles : nécessitent beaucoup plus de mémoire, beaucoup plus de calculs.

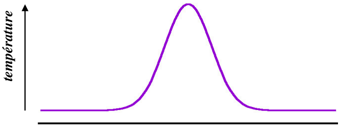
Un exemple simple : comment se répartit la chaleur dans cette pièce ? La loi de Fourier (et l'équation de la chaleur).

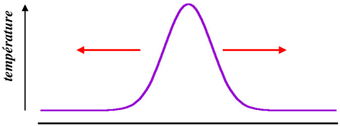
Joseph Fourier (1768–1830),
Préfet du Rhône et de l'Isère.

Commençons par une simple tige, chauffée non uniformément

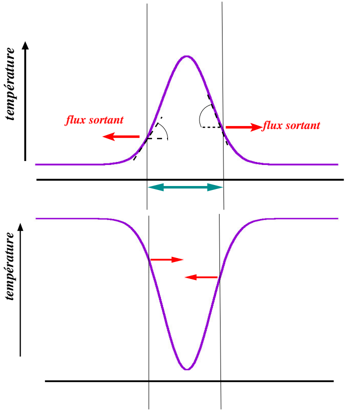


Commençons par une simple tige, chauffée non uniformément



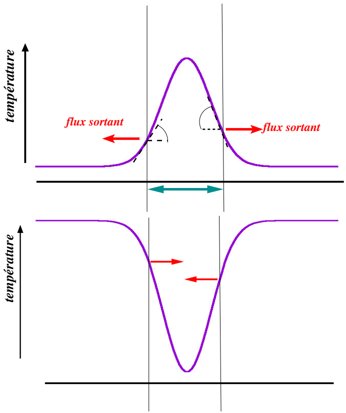


Commençons par une simple tige, chauffée non uniformément



Loi de Fourier : le flux de chaleur est proportionnel à la pente du profil de température.

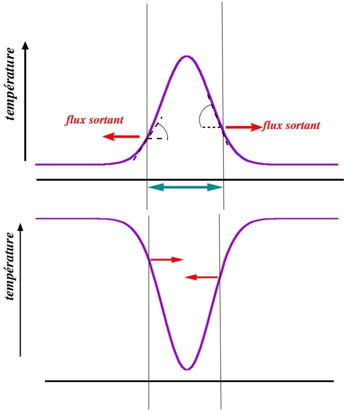
Commençons par une simple tige, chauffée non uniformément



Loi de Fourier : le flux de chaleur est proportionnel à la pente du profil de température.

- pente positive à gauche : flux sortant, pente négative à droite flux sortant,

Commençons par une simple tige, chauffée non uniformément



Loi de Fourier : le flux de chaleur est proportionnel à la pente du profil de température.

- pente positive à gauche : flux sortant, pente négative à droite flux sortant,
- pente négative à gauche : flux entrant, pente positive à droite flux entrant.

On peut en déduire une équation aux dérivées partielles, l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}.$$

On peut en déduire une équation aux dérivées partielles, l'équation de la chaleur :

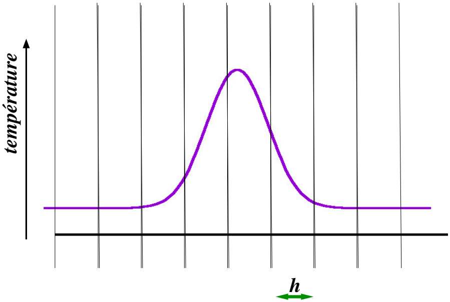
$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}.$$

k : constante de proportionnalité entre le flux et la pente.
(Note : on a pris la chaleur spécifique égale à 1, ce qui ne change rien.)

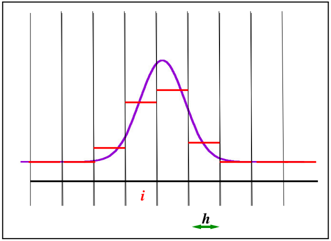
On connaît une solution exacte sous forme d'une somme infinie (série de Fourier), mais en pratique on ne peut en évaluer qu'un nombre fini de termes => approximation.

Sur ordinateur (une possibilité)

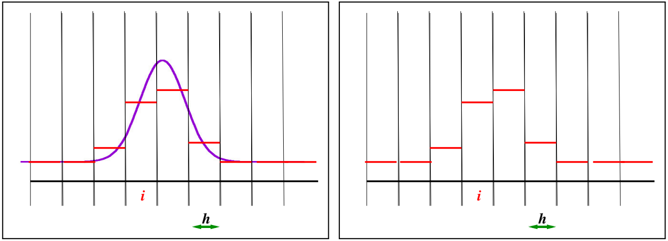
On découpe la tige en intervalles de longueur h :



Dans chaque intervalle on stocke la *valeur moyenne* de la température à l'instant initial $t = 0$:

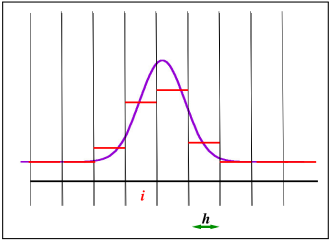


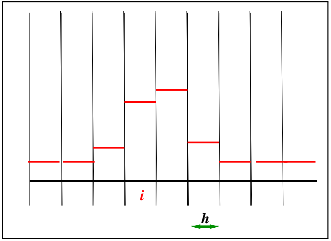
Dans chaque intervalle on stocke la *valeur moyenne* de la température à l'instant initial $t = 0$:



Comment faire évoluer ces valeurs moyennes ?

Dans chaque intervalle on stocke la *valeur moyenne* de la température à l'instant initial $t = 0$:

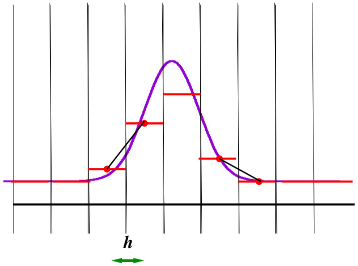


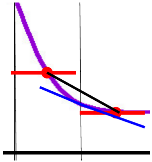


Comment faire évoluer ces valeurs moyennes ?

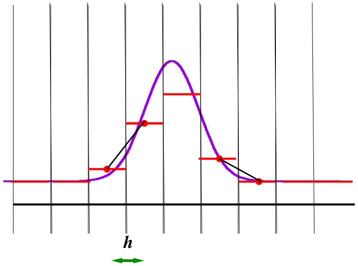
La quantité de chaleur stockée dans un intervalle i est :
$h\times$ la valeur moyenne de la température (dans cet intervalle).

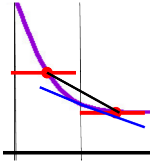
On remarque que si h est petit la différence de deux moyennes successives divisée par h semble être assez proche de la pente exacte :





On remarque que si h est petit la différence de deux moyennes successives divisée par h semble être assez proche de la pente exacte :





La pente du trait noir est proche de celle du trait bleu.

Évolution

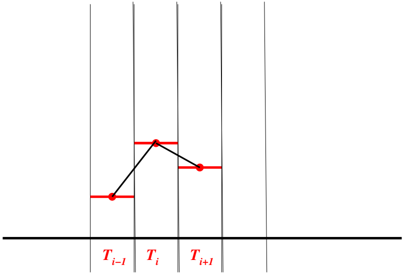
Comment faire évoluer la moyenne dans un intervalle, disons T_i ?

- Les flux approchés sont :
  - à gauche :

$$-k \times \frac{T_i - T_{i-1}}{h},$$

  - à droite :

$$k \times \frac{T_{i+1} - T_i}{h},$$



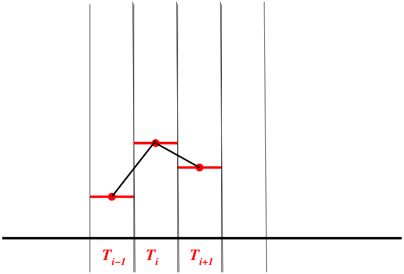
soit en tout :

$$k \times \frac{T_{i-1} - 2 \times T_i + T_{i+1}}{h}.$$

Évolution

Comment faire évoluer la moyenne dans un intervalle, disons T_i ?

- Les flux approchés sont :
  - à gauche :
  $$-k \times \frac{T_i - T_{i-1}}{h},$$
  - à droite :
  $$k \times \frac{T_{i+1} - T_i}{h},$$



soit en tout :
$$k \times \frac{T_{i-1} - 2 \times T_i + T_{i+1}}{h}.$$

C'est l'évolution « instantanée ».

Pendant un temps (petit) θ, on fera évoluer la quantité de chaleur $h \times \ T_i$ de $\theta \times$ le flux approché :

Pendant un temps (petit) θ, on fera évoluer la quantité de chaleur $h \times \ T_i$ de $\theta \times$ le flux approché :

$$h \times T_i^{\text{nouveau}} = h \times T_i +$$

Pendant un temps (petit) θ, on fera évoluer la quantité de chaleur $h \times \ T_i$ de $\theta\times$ le flux approché :

$$h \times T_i^{\text{nouveau}} = h \times T_i + \theta \times k \times \frac{T_{i-1} - 2 \times T_i + T_{i+1}}{h},$$

Pendant un temps (petit) θ, on fera évoluer la quantité de chaleur $h \times \ T_i$ de $\theta \times$ le flux approché :

$$h \times T_i^{\text{nouveau}} = h \times T_i + \theta \times k \times \frac{T_{i-1} - 2 \times T_i + T_{i+1}}{h},$$

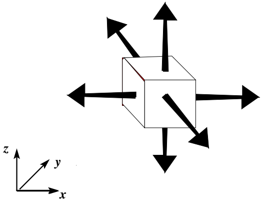
soit encore :

$$T_i^{\text{nouveau}} = T_i + \ \theta \times k \times \frac{T_{i-1} - 2 \times T_i + T_{i+1}}{h^2}.$$

Il faut bien sûr faire ce calcul pour chaque intervalle.
(On n'a plus que les 4 opérations $+, -, \times, /$ à effectuer).

En dimension 3

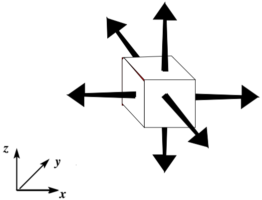
Au lieu d'intervalles, on considère des cubes (ou des parallélépipèdes).



A un instant t donné, le flux à travers une face du cube est proportionnel à la pente de T quand on fait varier la coordonnée perpendiculaire à la face et qu'on croise la face (dérivée partielle).

En dimension 3

Au lieu d'intervalles, on considère des cubes (ou des parallélépipèdes).



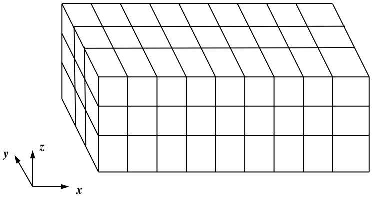
A un instant t donné, le flux à travers une face du cube est proportionnel à la pente de T quand on fait varier la coordonnée perpendiculaire à la face et qu'on croise la face (dérivée partielle).

Comme en dimension 1, on peut montrer que la valeur exacte de T est solution de l'équation aux dérivées partielles (équation de la chaleur) :

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right)$$

Sur ordinateur

On procède comme en dimension 1 : les cubes contiennent une approximation de la moyenne de T à l'instant initial.



On approche les flux par la différence des valeurs de la moyenne de T dans deux cubes voisins, divisée par h, la longueur des cotés des cubes.

L'apport du mathématicien

1. Prouver que l'équation de la chaleur a bien une solution (unique).
2. Prouver que quand θ et h tendent vers 0, la solution approchée converge vers cette solution exacte.

L'apport du mathématicien

1. Prouver que l'équation de la chaleur a bien une solution (unique).
2. Prouver que quand θ et h tendent vers 0, la solution approchée converge vers cette solution exacte.
3. Quelle erreur fait-on ?
   - On peut montrer que l'erreur est inférieure à $C \times (\theta + h^2)$

L'apport du mathématicien

1. Prouver que l'équation de la chaleur a bien une solution (unique).
2. Prouver que quand θ et h tendent vers 0, la solution approchée converge vers cette solution exacte.
3. Quelle erreur fait-on ?
   - On peut montrer que l'erreur est inférieure à $C \times (\theta + h^2)$
   - autrement dit, pour être quatre fois plus précis il faut diviser θ par 4 et h par 2.

L'apport du mathématicien

1. Prouver que l'équation de la chaleur a bien une solution (unique).
2. Prouver que quand θ et h tendent vers 0, la solution approchée converge vers cette solution exacte.
3. Quelle erreur fait-on ?
   - On peut montrer que l'erreur est inférieure à $C \times (\theta + h^2)$
   - autrement dit, pour être quatre fois plus précis il faut diviser θ par 4 et h par 2.

Mais dans ce cas, en dimension 3, en divisant h par 2, on multiplie le nombre de cellules par 8 ! Et on progresse en temps 4 fois plus lentement (la *complexité* du calcul est multipliée par 32).

L'apport du mathématicien

1. Prouver que l'équation de la chaleur a bien une solution (unique).
2. Prouver que quand θ et h tendent vers 0, la solution approchée converge vers cette solution exacte.
3. Quelle erreur fait-on ?
   - On peut montrer que l'erreur est inférieure à $C \times (\theta + h^2)$
   - autrement dit, pour être quatre fois plus précis il faut diviser θ par 4 et h par 2.

Mais dans ce cas, en dimension 3, en divisant h par 2, on multiplie le nombre de cellules par 8 ! Et on progresse en temps 4 fois plus lentement (la *complexité* du calcul est multipliée par 32).

Il faut donc trouver des méthodes plus précises (par exemple une méthode où l'erreur soit de la forme $C \times (\theta^2 + h^2)$).

Ouvrons les fenêtres

Que devient la répartition de la chaleur ?

Ouvrons les fenêtres

Que devient la répartition de la chaleur ?

- « Courant d'air » : circulation d'un fluide, qui transporte la chaleur.

Ouvrons les fenêtres

Que devient la répartition de la chaleur ?

- « Courant d'air » : circulation d'un fluide, qui transporte la chaleur.
- Équations de Navier-Stokes pour l'air.
- L'équation de la chaleur se complique (transport et diffusion).

Ouvrons les fenêtres

Que devient la répartition de la chaleur ?

- « Courant d'air » : circulation d'un fluide, qui transporte la chaleur.
- Équations de Navier-Stokes pour l'air.
- L'équation de la chaleur se complique (transport et diffusion).

Problème important ! Exemple : refroidissement d'un réacteur nucléaire (il ne doit pas exister de zone d'« eaux mortes »).

Les équations de Navier-Stokes (cas d'un fluide incompressible) :

- Inconnues : vitesse du fluide (3 composantes) et pression (1 composante).
- Problème beaucoup plus complexe (5 inconnues au lieu d'une) ; problème non linéaire.

Les équations de Navier-Stokes (cas d'un fluide incompressible) :

- Inconnues : vitesse du fluide (3 composantes) et pression (1 composante).
- Problème beaucoup plus complexe (5 inconnues au lieu d'une) ; problème non linéaire.
- Discrétisation : un grand problème théorique des années 1970.

Les équations de Navier-Stokes (cas d'un fluide incompressible) :

- Inconnues : vitesse du fluide (3 composantes) et pression (1 composante).
- Problème beaucoup plus complexe (5 inconnues au lieu d'une) ; problème non linéaire.
- Discrétisation : un grand problème théorique des années 1970.
- Simulation numérique complète du circuit de refroidissement d'un réacteur nucléaire : années 90 (EDF), quelques millions d'inconnues.

Un lent développement

Source : congrès de l'AFCAL(TI) 1960, 61, 63.
En 1961 :

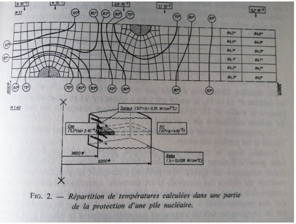


Fig. 2. — *Répartition de températures calculées dans une partie de la protection d'une pile nucléaire.*

« Calcul » d'un réacteur nucléaire (EDF & CEA).

IBM 7040 (mémoire : 32 K mots).

En 1963, deux projets :

1. Code nucléaire tridimensionnel (EDF).
2. Thermique (Société Suisse).

IBM 1620 (mémoire 40 K mots).

Deux mondes distincts, qui ne communiquent pas

- Aux États–Unis et au Royaume Uni : calcul de structures (élasticité linéaire, code NASTRAN (NASA)).
- En France : réacteurs nucléaires.

Une chaîne de compétences

Comment obtenir des résultats raisonnables ?

Une chaîne de compétences

Comment obtenir des résultats raisonnables ?

- (1). Du coté de la physique (de la mécanique, de la biologie, etc) :

  Le modèle est-il correct ? Exemple de problèmes :

  - Modèle de l'élasticité linéaire : parfaitement adapté aux petites déformations, mais pas aux grandes (exemple : tremblement de terre).
  - Les coefficients du modèle sont-ils à peu près exacts ?

- (2). Du coté des mathématiques.

  Le modèle est-il correct ? Exemple de problèmes :

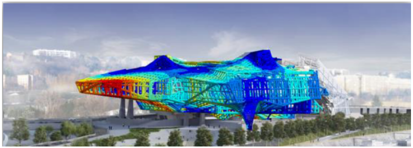
  - Les équations ont-elles une solution ?
  - Stabilité de la solution par rapport aux paramètres ?

  La « discrétisation » est-elle correcte ? précise ?

- (3). Du coté de l'implantation sur ordinateur.
  - les programmes peuvent atteindre des centaines de milliers de lignes, qui ne doivent pas contenir d'erreurs !
  - La précision des calculs est limitée (16 chiffres).

- (3). Du coté de l'implantation sur ordinateur.
    - les programmes peuvent atteindre des centaines de milliers de lignes, qui ne doivent pas contenir d'erreurs !
    - La précision des calculs est limitée (16 chiffres).

Beaucoup de « codes de calcul » ont une vie très longue (Exemple : Aster (EDF) $\simeq$ 35 ans).



Aster et le musée.

Développement : premiers « super-calculateurs »

1976 – Cray 1, premier super-calculateur.

- 8,39 Méga-octets.
- 160 Mflops.
- US \$ 7.9 millions ($\simeq$ \$ 33.7 millions en 2020).

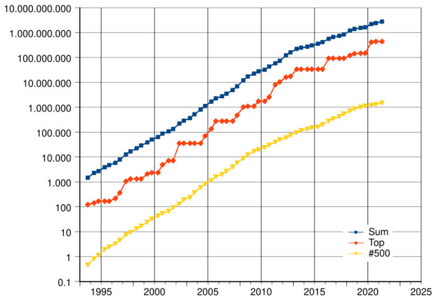
Définition : flops= *floating point Operations by second* : nombre de $\times$ $+$ $-$ par seconde, avec une précision de 16 chiffres.

Tout est relatif...
Cray-1 / mon PC.

	Cray 1	Mon PC	Mon PC /Cray-1
Mémoire	8,39 Mo	8 Go	$\simeq$ 1000
Vitesse	160 Mflops	100 Gflops	625
Prix	33,7 millions $	1000 euros	$\simeq 1/3000$

« Démocratisation » du calcul scientifique.

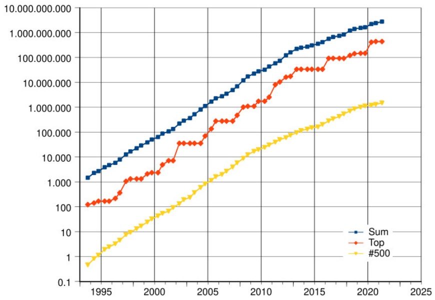
Évolution



- Ordonnée : Gflops.
- Échelle logarithmique.

- Machine la plus puissante.

Évolution



- Ordonnée : Gflops.
- Échelle logarithmique.

- Machine la plus puissante.
- En jaune : la 500^{e} machine.
- Puissance cumulée des 500 plus puissantes machines.

Note : votre ordinateur (récent) : $\simeq$ 100 Gflops.

Question posée en 2010

La puissance des machines a augmenté d'un facteur 1000 tous les 10 ans.

- *Question :* On en est au pétaflop (10^{15} opérations par seconde). Peut-on atteindre l'hexaflop (10^{18} opérations par seconde) en 10 ans ?

Super-ordinateurs

- Réseaux (rapides) d'ordinateurs classiques.
- Très grand nombre de cœurs (Exemple : TaihuLight : 16 millions).

Super-ordinateurs

- Réseaux (rapides) d'ordinateurs classiques.
- Très grand nombre de cœurs (Exemple : TaihuLight : 16 millions).

Calcul parallèle absolument nécessaire.

Penser le parallélisme ?

Un exemple, loin du calcul scientifique :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 3 & 1 \\
 & \times & 1 & 2 & 4 \\
\hline
 & & \color{red}{9} & \color{red}{2} & \color{red}{4} \\
 & \color{blue}{4} & \color{blue}{6} & \color{blue}{2} & \\
\color{green}{2} & \color{green}{3} & \color{green}{1} & & \\
\hline
2 & 8 & 6 & 4 & 4
\end{array}$$

Les lignes en rouge, bleu et vert peuvent être calculées en parallèle, mais pas la dernière ligne !

Limite ?

Un ordinateur *exaflopique* (10^{18} flops) basé sur les matériels de 2010 consommerait autant qu'une ville moyenne.

N° 1, en novembre 2021 : Fugaku (Fujitsu, Japon) :

- 200 Petaflops.
- Basé sur des processeurs ARM (cf. téléphones portables, faible consommation).

Fugaku

Accélérer les calculs = des ordinateurs plus puissants ?

Pas seulement !

Du coté des mathématiques : définir des méthodes et des algorithmes moins « coûteux ».

Météo : prévision numérique du temps

Météo : prévision numérique du temps

- 1904, Wilhelm Bjerknes : la météo est un problème de physique mathématique, dépendant de conditions initiales.

Météo : prévision numérique du temps

- 1904, Wilhelm Bjerknes : la météo est un problème de physique mathématique, dépendant de conditions initiales.
- 1922, Lewis Fry Richardson : *Weather Prediction by Numerical Process.*

Météo : prévision numérique du temps

- 1904, Wilhelm Bjerknes : la météo est un problème de physique mathématique, dépendant de conditions initiales.
- 1922, Lewis Fry Richardson : *Weather Prediction by Numerical Process.*
- Années 1960, premières tentatives de calcul, avec beaucoup de simplifications.

Météo, prévision numérique du temps : France, 2020

Actuellement :

- horizontalement : mailles de 1,3 km de coté,
- verticalement : une centaine de niveaux.

8 prévisions par jour.

- En 30 ans : puissance de calcul multipliée par 10 millions.
- 2 super-calculateurs (Bull) : en tout 21,48 petaflops.
- 300 000 cœurs.

Assimilation de donnés : introduire les données des satellites, les mesures au sol etc. dans le modèle (explosion du volume des données).

Assimilation de donnés : introduire les données des satellites, les mesures au sol etc. dans le modèle (explosion du volume des données).

- « Aléatoire » : une quinzaine simulations avec des conditions initiales différentes (rendu possible par l'augmentation de la puissance de calcul).
- Les modèles permettent aussi de « jouer » sur les variables météorologiques.

Quelques illustrations

Simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes d'un jet (mach 0,9) sortant d'une buse cylindrique.

Christophe Bogey /LMFA (École Centrale Lyon).

- isosurface de vitesse axiale dans le jet (en gris),
- fluctuations de pression en dehors du jet.

Calculs de l'écoulement et du champ magnétique dans le noyau terrestre.

Nathanael Schaeffer,
CNRS / Université Grenoble Alpes / ISTerre.

- Environ 4 milliards de cellules.
- Simulation : évolution de la terre pendant environ 3500 ans.

Énergie cinétique.

Température dans le plan équatorial de la Terre.

Champ magnétique.

Des problèmes qu'on aimerait bien savoir résoudre. Exemples. 1) L'équation de Vlasov-Poisson.

Décrit l'évolution d'un plasma : (un gaz dont les atomes (noyaux et électrons) ont été dissociés).

Problème : l'inconnue (fonction de répartition) décrit la densité de particules au point (x, y, z) et avec une vitesse (v_x, v_y, v_z).

Des problèmes qu'on aimerait bien savoir résoudre. Exemples. 1) L'équation de Vlasov-Poisson.

Décrit l'évolution d'un plasma : (un gaz dont les atomes (noyaux et électrons) ont été dissociés).

Problème : l'inconnue (fonction de répartition) décrit la densité de particules au point (x, y, z) et avec une vitesse (v_x, v_y, v_z).

L'équation est posée en dimension 6.
Application : plasma dans un tokamak (ITER).
Petit calcul : $n = 100$ (c'est peu !), alors $n^6 = 10^{12}$!

Des problèmes qu'on aimerait bien savoir résoudre. Exemples. 2) Interaction d'un typhon avec une ville.

- La trajectoire des typhons est déjà prédite avec précision (impact sur la côte : quelques kilomètres d'erreur, quelques dizaines de minutes d'incertitude).
- Mais les effets sur une ville sont mal compris.

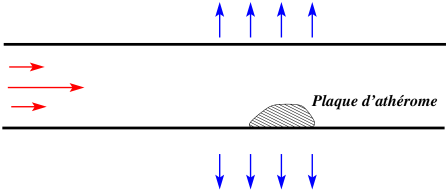
Des problèmes qu'on aimerait bien savoir résoudre. Exemples. 2) Interaction d'un typhon avec une ville.

- La trajectoire des typhons est déjà prédite avec précision (impact sur la côte : quelques kilomètres d'erreur, quelques dizaines de minutes d'incertitude).
- Mais les effets sur une ville sont mal compris.
- Physique à approfondir.
- Tailles des mailles nécessaire : 1 m^3 !

Pas sérieux, s'abstenir

Pas sérieux, s'abstenir

Problème posé par un représentant célèbre de « big pharma » :



Est-ce que ralentir le rythme cardiaque diminuera le risque d'arrachement de la plaque d'athérome ?

Pas sérieux, s'abstenir

- Le sang n'est pas un fluide classique (globules => fluide visco-élastique).
- Interaction sang / paroi.
- La paroi n'est pas isotrope, son comportement est mal connu.
- La plaque d'athérome : quelles caractéristiques mécaniques ?
- La mécanique de la rupture : jamais simple.

Mais il s'agissait probablement de faire de belles visualisations.

Pas sérieux, s'abstenir

- Le sang n'est pas un fluide classique (globules => fluide visco-élastique).
- Interaction sang / paroi.
- La paroi n'est pas isotrope, son comportement est mal connu.
- La plaque d'athérome : quelles caractéristiques mécaniques ?
- La mécanique de la rupture : jamais simple.

Mais il s'agissait probablement de faire de belles visualisations.

CFD =
Computational Fluid Dynamics,
ou
Computational Fluid for Directors ?

Et la Covid 19 ?

Depuis le début de la pandémie, on assiste à une floraison de modèles épidémiologiques.

Beaucoup *(pas tous)* sont des systèmes d'équations différentielles ordinaires (pas de prise en compte d'inhomogénéités spatiales).
Calculs particulièrement simples et peu « coûteux ».

Depuis le début de la pandémie, on assiste à une floraison de modèles épidémiologiques.

Beaucoup *(pas tous)* sont des systèmes d'équations différentielles ordinaires (pas de prise en compte d'inhomogénéités spatiales). Calculs particulièrement simples et peu « coûteux ».

Voir :

- MODCOV19 : `https://modcov19.math.cnrs.fr/`
- OPECST (Sénat, Rapport Villani) : `https://www.senat.fr/fileadmin/Fichiers/Images/opecst/quatre_pages/OPECST_modelisation_covid_19.pdf`

Merci !